PRIMEIRA PROVA DE EDO-TURMA DA MATEMÁTICA-04/2004

DANIEL SMANIA

Questão 1. *(2.0pt) Encontre a solução dos seguintes problemas com valor inicial (PVI)*

$$a.\quad \begin{array}{l} ty' - y = t^2 sen\ t \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \end{array} \qquad b.\quad \begin{array}{l} y' - ty = 3t \\ y(0) = 6 \end{array}$$

$$c.\quad \begin{array}{l} (t^2 + cos\ y)y' = -2ty \\ y(1) = \pi \end{array} \qquad d.\quad \begin{array}{l} y' = \frac{y}{t} + t^3y^3 \\ y(1) = 2 \end{array}$$

Questão 2. *(1.0pt) Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais*

$$a)\ y' = t\ ln\ (t^2)(y^2 + 7y + 10)\ \ b)\ y' = y\ sen\ t$$

Questão 3. *(2.0pt) A quantidade de uma certa espécie de bactéria em um ambiente é descrita pela equação diferencial.*

$$y' = -y^3 + 5y^2 - 6y.$$

onde $y(t)$ é a quantidade (em gramas) de bactérias no tempo t. Se a população inicial era de 0.5 gramas, o que se pode dizer sobre a quantidade de bactérias no ambiente após um longo período de tempo? Justifique sua resposta.

Questão 4. *(1.0pt) Considere o PVI*

$$\begin{array}{l} ty' - y = t^2 sen\ t \\ y(0) = 0 \end{array}$$

(Note que é a mesma equação diferencial da questão 1, item a, mas com uma condição inicial diferente.) Mostre que este PVI tem INFINITAS soluções distintas.

Questão 5. *(2.0pt) Um tanque cilíndrico de 5 m de raio e 6 m de altura recebe constantemente $10m^3$ de agua por minuto. Porém no fundo deste tanque há um buraco. Segundo a Lei de Torricelli, a vazão de agua pelo buraco (dado, digamos, em m^3/min) é proporcional à raiz quadrada da altura do nível da agua no tanque. Assuma que saibamos por experimentos que esta constante de proporção é 10. Se começarmos com o tanque vazio, ele irá ou não eventualmente transbordar? Justifique sua resposta.*

Questão 6. *(2.0pt) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função C^1 (derivadas parciais contínuas) tal que $\partial f/\partial y \leq -c < 0$. Suponha que existe uma função C^2 $y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado nós temos que a função $y_x(t) = y(t,x)$ é a única solução do PVI*

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(0) = x \end{array}$$

- *a.(0.5pt) Mostre que*

  $$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t,x))\frac{\partial y}{\partial x}$$

  Conclua que para cada x FIXADO a função $h_x(t) := \partial y/\partial x$ satisfaz uma equação diferencial da forma

  $$h'_x = g_x(t)h_x$$

  com $g_x \leq -c$.
- *b.(1.5pt) Use a estimativa sobre g_x, a equação diferencial acima e o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que para todo par de condições iniciais x_0 e x_1 existe uma constante K tal que*

  $$|y_{x_1}(t) - y_{x_0}(t)| \leq Ke^{-ct}$$