LISTA DOMINICAL

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *Ache uma base para o espaço de soluções do sistema de equações diferenciais homogêneas*

$$\begin{array}{rcc} x' = & x & -y \\ y' = & y & -\alpha z \\ z' = & \alpha z & -x \end{array}$$

Nos seguintes casos: a) $\alpha = 9/2$*, b)* $\alpha = -1/2$*, c)* $\alpha = 2$ *(EMD, pg 149)*

Exercício 2. *Encontre a solução geral dos sistemas*

$$a.\ \begin{array}{rcc} x' = & -2x & +3z \\ y' = & 4y & \\ z' = & -6x & +7z \end{array} \quad b.\ \begin{array}{rcc} x' = & 2x & \\ y' = & y & -z \\ z' = & z & -x \end{array} \quad c.\ \begin{array}{rcc} x' = & 2x & \\ y' = & y & -z \\ z' = & z & -x \end{array}$$

$$d.\ \begin{array}{rccc} x' = & 3x & +y & -t \\ y' = & 8x & +y & -t^2 \end{array} \quad e.\ \begin{array}{rcc} x'' = & x & -y \\ y'' = & y & -x \end{array} \quad f.\ \begin{array}{rc} x'' = & ky' \\ y'' = & -kx' \end{array} \quad (k\ constante)$$

EMD, pg 155.

Exercício 3. *Encontre as soluções gerais das seguintes equações diferenciais:*

(1) $y'' - y - 2y = 0.$
(2) $y'' - y' - 2y = cos\ x + 3sen\ x.$
(3) $y''' - y'' - 12y' = 0.$
(4) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0.$
(5) $y'' - 2y' + 10y = 0.$
(6) $y''' + 4y' = 0.$

FA, pg 119-120

Exercício 4. *Encontre a solução geral do sistema*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exercício 5. *Encontre a solução geral dos seguintes sistemas:*

$$a. \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercício 6. *Encontre a solução do problema com valor inicial*

$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 2 \ e \ y'(0) = 3$$

Exercício 7. *Encontre a solução geral do sistema linear não homogêneo.*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Exercício 8. *Seja A uma matriz quadrada nxn e seja λ um autovalor real de A. Denote por $V(\lambda)$ o autoespaço associado a este autovalor.*

- *Mostre que, se $v_0 \in V(\lambda)$, então, se $v(t)$ é a solucão do PVI $v' = Av$, com $v(0) = v_0$, nós temos que $v(t) \in V(\lambda)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*
- *Mostre que, se $\lambda > 0$ então*

$$\lim_{t\to+\infty} ||v(t)|| = +\infty,$$

e que, se $\lambda < 0$ então

$$\lim_{t\to+\infty} ||v(t)|| = 0,$$

Exercício 9. *(Este é legal!!) Um sistema linear de equações diferenciais é chamada de hiperbolica a matriz deste sistema não possui autovalores (reais ou complexos) cuja parte real é zero (isto é $\lambda = a + ib$, com $a \neq 0$, para todo autovalor de A. Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Suponha que o sistema acima seja hiperbólico com dois autovalores reais λ_1 e λ_2, o primeiro positivo e o segundo negativo. Mostre que, para toda solução deste sistema $v(t)$ tal que $v(0)$ $\tilde{NAO}$ está em $V(\lambda_2)$, nós temos $lim_{t\to+\infty}|v(t)| = +\infty$ e

$$\lim_{t\to+\infty} dist(v(t), V(\lambda_1) = 0.$$

Aqui, se E é um subespaço vetorial, então $dist(v, E) := min_{u\in E}|v - u|$.

Exercício 10. *(Este é legal!!) Faça os seguintes itens*

(1) *Uma das igualdades mais interessantes sobre matrizes é a seguinte: se A é uma matriz nxn e trA denota o traço da matriz A (a soma dos elementos da diagonal de A), então*

$$det\ e^A = e^{tr\ A}.$$

Um dos objetivos deste item é mostrar esta igualdade para o caso $n = 2$ (de fato, argumentos similares funcionam para qualquer n, mas dá mais trabalho...). Seja A uma matriz 2×2. Defina $h(t) := det\ e^{At}$. Mostre que h é soluçào do PVI

$$\begin{cases} h' = (trA)h \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Conclua que det $e^{At} = e^{(tr\ A)t}$ (Sugestão: note que as colunas $v_1(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e $v_2(t) = (y_1(t), y_2(t))$ de e^{At} são soluções dos PVIs $v_1' = Av_1$, com $v_1(0) = (1, 0)$, e $v_2' = Av_2$, com $v_2(0) = (0, 1)$. Use isto para mostrar que $h(t)$ satisfaz o PVI acima)

(2) *Considere uma região D de R^2 com area finita d. Seja $d(t)$ a area da imagem da região D pela tranformação linear e^{At}. Mostre que $d(t)$ é decrescente se tr $A < 0$; é constantes se tr $A = 0$; e é crescente se tr $A > 0$. (Sugestão: use o item anterior e o fato de que a area da imagem de uma região de R^2 por uma transformação linear definida por uma matriz B é $|det\ B|d$, onde d é a area de D.)*

1. Bibliografia

FA=Equações Diferenciais, por Frank Ayres Jr.

EMD= Elementos de Equações diferenciais, por Edmundo Menezes Dantas.