LISTA INCRIVELMENTE FASCINANTE DE EDO

DANIEL SMANIA

OBS: esta é uma lista minimal: espera-se que os alunos façam outros exercícios retirados de livros, etc... :-)

Questão 1. *Considere as equações diferenciais abaixo. Quais são suas soluçòes estácionárias? Quais destas são instáveis ou estáveis ? Analise o comportamento de uma solução arbitrária quando $t \to +\infty$. Pode-se dizer also das soluções quando $t \to -\infty$?*

(1) $y' = 1 + y^2$,
(2) $y' = y^2 - 3y + 1$,
(3) $y' = y^3 + 2y^2 - y - 2$.

Questão 2. *Encontre a solução geral das seguintes equações:*

(1) $x' + 2tx = 4t$.
(2) $x't = x + t^3 + 3xt^2 - 2t$.
(3) $(t-2)x' = x + 2(t-2)^3$.
(4) $x' + xcotg\ t = 5e^{cost}$
(5) $x' - tx = tx^5$.
(6) $y' + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$.
(7) $y' + y = te^t$.

e a solução do seguintes P.V.I (problemas de valor inicial)

(1) $y' + \sqrt{1+t^2}y = 0$. *com* $y(0) = \sqrt{5}$.
(2) $y' + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0$, *com* $y(0) = 0$.
(3) $y' + y = \frac{1}{1+t^2}$, *com* $y(1) = 2$.

Questão 3. *Mostre que toda solução da equação $y' + ay = be^{-ct}$, onde a e c são positivos e b é um número qualquer, tende a zero qundo t tende ao infinito.*

Questão 4. *Dada a equação diferencial $y' + a(t)y = f(t)$, com $a(t)$ e $f(t)$ funçóes contínuas definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ e tais que $a(t) \geq c > 0$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Mostre que toda solução tende a zero quando t tende a infinito.*

Questão 5. *Seja $a(t)$ uma funcção contínua tal que $a(t) \geq c > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer. Sejam y_1 e y_2*

soluções dos seguintes problemas de valor inicial (P.V.I)

$$\begin{aligned} y_1' = & \quad -a(t)y_1 + f(t) \\ y_1(0) = & \qquad u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2' = & \quad -a(t)y_2 + f(t) \\ y_2(0) = & \qquad u_2 \end{aligned}$$

Mostre que $|y_1(t) - y_2(t)| \leq |u_1 - u_2|e^{-ct}$*, para todo* $t \geq 0$*. Conclua que* $lim\ _{t\to+\infty}|y_1(t) - y_2(t)| = 0$*.*

Questão 6. *De a solução geral ou PVI (se condições iniciais forem dadas) das seguintes Equações diferenciais:*

(1) $(1 + t^2)y' = 1 + y^2$,
(2) $y' = (1 + t)(1 + y)$,
(3) $cos\ y\ sen\ ty' = sen\ y\ cost\ t$,
(4) $t^2(1 + y^2) + 2yy' = 0$, $y(0) = 1$,
(5) $(1 + t^2)^{1/2}y' = ty^3(1 + t^2)^{-1/2}$, $y(0) = 0$.
(6) $3ty' = y\ cos\ t$, $y(1) = 0$,
(7) $y' = k(a - y)(b - y)$, $y(0) = 0$, $a, b > 0$.
(8) $y' = sen\ 5t$,
(9) $y' = \frac{x^2y^2}{1+x}$,
(10) $y' = e^{3x+2y}$,
(11) $2y' - 1/y = 2x/y$,
(12) $(t + \sqrt{t})y' = y + \sqrt{y}$.

Questão 7. *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$f(x + y) = f(x)f(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$*. Assuma que* f *é contínua em* 0*. Mostre que*

(1) $f(0) = 0$ *ou* $f(0) = 1$*. Se* $f(0) = 0$*, mostre que* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
(2) *Suponha que* $f(0) = 1$*. Mostre que* f *é continua em todos os pontos* $x \in \mathbb{R}$*.*
(3) *Suponha que* $f(0) = 1$ *e que* f *é diferenciável em* 0*. Mostre que* f *é diferenciável em todos os pontos* $x \in \mathbb{R}$*. De fato*

$$f'(x) = f'(0)f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*.*
(4) *Usando o item anterior, conclua que, nas condições do item anterior,* $f(x) = e^{cx}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $c := f'(0)$*.*

OBS: De fato, se f *é qualquer função tal que i.)* $f(x+y) = f(x)f(y)$*, para todo* x *e* y*, ii.)* f *é limitada em uma vizinhança de* 0 *(isto é, existe* C *tal que* $|f(x)| \leq C$*, para todo* x *em um intervalo* $]-\epsilon, \epsilon[$ *iii.)* $f(0) \neq 0$*,* *então NECESSARIAMENTE* f *é da forma* $f(x) = e^{cx}$*, para alguma constante* $c \in \mathbb{R}$*. Mas a prova é mais delicada: tente, é um desafio interessante!!*

Questão 8. *Seja* $f\colon R^2 \to R^2$ *uma funçào contínua, com derivadas parciais contínuas, tal que* $f(t,0) = 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Mostre que se* $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaz* $y' = f(t,y)$*, então um dos seguintes casos ocorre i.)* $y(t) = 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. ii.)* $y(t) > 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *ou iii.)* $y(t) < 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Questão 9. *Seja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma função contínua, com derivadas partiais contínuas, tal que exista* $p \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(t+p,x) = f(t,x),$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$*. Mostre que se* $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma solução da equação diferencial* $y' = f(t,y)$ *tal que* $y(0) = y(p)$*, então* y *é uma solução periódica de período* p*, isto é,* $y(t+p) = y(t)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *(Sugestão: use o teorema da existência e unicidade).*

1. Bibliografia

FA=Equações Diferenciais, por Frank Ayres Jr.

EMD= Elementos de Equações diferenciais, por Edmundo Menezes Dantas.