2^a Lista de Exercícios de SMA-802- Cálculo II

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Exercício 1 *Encontre o maior subconjunto de $I \subseteq \mathbb{R}$ para os quais as curvas parametrizadas $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ abaixo sejam diferenciáveis. Encontre as equações paramétricas da curva e o vetor tangente à curva nos instantes $t \in I$.*

a) $\gamma(t) = (\cos(t), t)$ *b)* $\gamma(t) = (\cos(t^2 - 1), e^{t^3+2t-1}, senh(t^3 - t^2 + 1))$

c) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ *d)* $\gamma(t) = (cosh(t^3 + t^2), 3t^3 - 4t + 15, sen(t^3 + t^2 + t + 1))$

e) $\gamma(t) = (sen(t), \cos(t))$

Exercício 2 *Encontre o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para os quais as curvas parametrizadas do exercício 1 são regulares.*

Exercício 3 *Ache o comprimento da curva regular γ, em cada um dos itens abaixo:*

a) $\gamma : \begin{cases} x = 5t \\ y = 4t^2 \\ z = 3t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ *b)* $\gamma : \begin{cases} x = t^2 \\ y = tsen(t) \\ z = t\cos(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

c) $\gamma : \begin{cases} x = 2t \\ y = 4sen(3t) \\ z = 4\cos(3t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ *d)* $\gamma : \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 4t \\ z = 3 + 2t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$

e) $\gamma(t) = e^t\ \vec{\imath} + tsen(t)\ \vec{\jmath} + t\cos(t)\ \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$ *f)* $\gamma(t) = 3t^2\ \vec{\imath} + t^3\ \vec{\jmath} + 6t\ \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

Exercício 4 *Uma* **concha-espiral** *é uma curva regular C no espaço que admite uma parametrização do tipo* $\gamma : \begin{cases} x = ae^{wt}\cos(t) \\ y = ae^{wt}sen(t) \\ z = be^{wt} \end{cases}, t \geq 0$, *onde a, b, w são constantes fixadas.*

a) Mostre que a curva C está contida no cone $a^2z^2 = b^2(x^2 + y^2)$.

b) Trace o gráfico de C para $a = b = 4$ e $w = -1$.

c) Ache o comprimento de C correspondente ao intervalo $t \geq 0$.

Exercício 5 *Considere a curva C parametrizada dada por:* $\begin{cases} x = asen(t)sen(\alpha) \\ y = bsen(t)\cos(\alpha) \\ z = c\cos(t) \end{cases}, t \geq 0$, *onde a, b, c e α são constantes fixadas.*

a) Mostre que C está contida no elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

b) Mostre que C está num plano que contém o eixo-z.

c) Faça um esboço do gráfico da curva C.

Exercício 6 *Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva C no ponto $P \in C$, nos seguintes casos:*

a) $C : \begin{cases} x = 2t^3 - 1 \\ y = -5t^2 + 3 \\ z = 8t + 2,\ P = (1, -2, 10) \end{cases}$ *b)* $C : \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = t^2 + 4,\ P = (1, 0, 4) \end{cases}$

c) $C :\ \gamma(t) = e^t\,\vec{\imath} + tsen(t)\,\vec{\jmath} + t\cos(t)\,\vec{k},\ P = (1, 0, 0)$ *f)* $C :\ \gamma(t) = 3t^2\,\vec{\imath} + t^3\,\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k},\ P = (3, 1, 6)$

Exercício 7 *Uma hélice é uma curva parametrizada regular cujo vetor tangente em cada ponto faz ângulo constante com um vetor uniário $\vec{u}$. Mostre que a curva parametrizada por* $\gamma : \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3,\ t \in R \end{cases}$ *é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\vec{u}$.*

Exercício 8 *Um ponto move-se sobre uma curva regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de modo que o vetor posição $\gamma(t)$ e o vetor tangente $\gamma'(t)$ sejam ortogonais. Mostre que o traço de γ está sobre uma esfera de centro na origem. (sugestão: mostre que $||\gamma(t)||^2 =$ constante, para todo t calculando sua derivada em relação a t.)*

Exercício 9 *Se uma curva parametrizada regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tem vetor tangente $\vec{u} = \gamma'(t_0)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$, então o* **plano normal** *a γ em P é o plano que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $\vec{u}$.*

Encontre a equação do plano normal à curva parametrizada regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ no ponto P nos seguintes casos:

a) $\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = t^2 + 4 \end{cases}, P = (1, 0, 4)$

b) $\gamma : \begin{cases} x = t sen(t) \\ y = t\cos(t) \\ z = t \end{cases}, P = (\pi/2, 0, \pi/2)$

c) $\gamma(t) = e^t\,\vec{\imath} + t sen(t)\,\vec{\jmath} + t\cos(t)\,\vec{k},\ P = (1, 0, 0)$

Exercício 10 *Um jogador de futebol lança uma bola a uma distância de 30 metros. Se a bola é liberada a um ângulo de $\pi/4$ radianos com a horizontal, encontre sua velocidade inicial.*

Exercício 11 *Um projétil é lançado horizontalmente de uma altura de 300 metros acima do solo a uma velocidade de $550 m/s$. Quando ele atingirá o solo?*