Primeira Lista de Exercícios

Exercício 1 *Calcule*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{2n^3+n-1}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+5^n}{2+3^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2}{n}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} t^i$

Exercício 2 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(b) *Mostre que, para todo* $p \neq 0$, *não existe o limite* $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Exercício 3 *Prove que não existe o limite* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{\mathrm{x}}$.
Dica: *Considere as seqüências*

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \qquad e \qquad y_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercício 4 *Mostre que a seqüência dada é convergente:*

(a) $\left\{\dfrac{n+1}{n+2}\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{n^2+2n+2}{(n+1)^2+2}\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n+4}{n+5}\right\}$

(e) $\left\{\dfrac{p(n)}{q(n)}\right\}$, *onde* p, q *são polinômios com grau de* p *(gr(p)) estritamente menor do que o grau de* q *(gr(q)); isto é, gr(p) <gr(q)*

Exercício 5 *Se* $\{x_n\}$ *for uma seqüência convergente com* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* $\{y_n\}$ *for uma seqüência limitada, mostre que a seqüência* $\{x_n y_n\}$ *será convergente com* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Exercício 6 *Se* $\{x_n\}$ *for uma seqüência crescente (decrescente) e limitada, mostre que* $\{x_n\}$ *é convergente com limite* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *(* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*)*

Exercício 7 *Considere a seqüência* $\{x_n\}$ *definida por* $x_1 = \sqrt{2}$ *e, se* $n \geq 2$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$. *Mostre que esta seqüência é crescente e limitada e conclua que ela é convergente. Calcule o limite da seqüência dada.*

Exercício 8 *Mostre que a seqüência* $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$ *é crescente mas não é limitada.*

Exercício 9 *Mostre que*

(a) *a seqüência* $\{n^{1/n}\}_{n\geq 1}$ *é convergente e calcule o seu limite.*

(b) *a seqüência* $\{c^{1/n}\}$, $c > 0$ *é convergente e calcule o seu limite.*